

ZAHLENTHEORIE I

DARSTELLUNG DER POTENZMENGE DER NATÜRLICHEN ZAHLEN DURCH FORMALE POTENZREIHEN

von

Abu al Kuset

VORBEMERKUNGEN

Ziel dieser Arbeit ist es, die Zahlen und Zahlenmengen aus einem Konglomerat von Definitionen und Beweisen einheitlich darzustellen. Dies geschieht hier mithilfe der formalen Potenzreihen, die ja einen umfangreichen Werkzeugkasten zur Verfügung stellen. In Wirklichkeit geht es hier leider nicht um die natürlichen Zahlen – da ja keiner genau weiß, was diese sind. Vielmehr wird hier dafür – wie in vielen Arbeiten auch – ihr mengentheoretische Modell - wie zB durch die Peanoaxiome definiert – verwendet.

Bezeichnungen: **N**, (**N**₀) stehen für die Menge der natürlichen Zahlen (mit 0)
 P(N), **P(N**₀) stehen für die dazugehörigen Potenzmengen.
 Q, **Z** oder **R** stehen für die rationalen, ganzen oder reellen Zahlen.
 P stehe für die Menge der Primzahlen.
 Im allgemeinen werden Zahlenmengen mit Kleinbuchstaben bezeichnet

INHALT

1. Der Indikator von a	2
2. Majoranten von a	4
3. Der Akkumulator von a	4
4. Der potenzierte Akkumulator für unendliche a	5
5. Der Generator für unendliche a	6
6. Beispiel	8

1. Der Indikator von a

Definition:

Sei $a \in \mathbf{P}(\mathbf{N}_0)$. Unter dem **Indikator von a** versteht man die formale Potenzreihe

$$1^{<a>}(x) := \sum_{\alpha \in a} x^\alpha.$$

Anmerkung: Wenn die formale Potenzreihe eine Taylorreihe einer „bekannten“ Funktion darstellt, spricht man auch oft von einer Funktion statt von einer formalen Potenzreihe wenn keine Missverständnisse zu befürchten sind.

Die Ausdrücke x^α , so sagt man, bilden die Platzhaltermenge der formalen Potenzreihen, die die Eindeutigkeit der Koeffizienten und der Funktion selber garantieren müssen. In der Rechnung kann die Platzhaltermenge eine Rechenstruktur, wie zB eine Skalarmenge oder eine Operatormenge beinhalten.

Die Zahlen α können, müssen aber nicht, in der Definition von a irgendwie indiziert sein. Der folgende Satz ordnet jedoch a die Indexmenge $\mathbf{N}_0$ so zu, dass stets $a_n < a_{n+1}$ ist (und im Falle der Endlichkeit von a mit dem größten a_n abbricht).

Satz:

Für alle $a \in \mathbf{P}(\mathbf{N}_0)$ existiert die eindeutig bestimmte Folge $\{(1^{<a>})_n \mid n \geq 0\} \subseteq \{0, 1\}$ mit

$$1^{<a>}(x) = \sum_{n \geq 0} (1^{<a>})_n x^n \text{ und somit } (1^{<a>})_n = \begin{cases} 1 & n \in a \\ 0 & n \notin a \end{cases}.$$

BW: Da stets $a_n \neq a_k$ für alle unterschiedlichen n und k gilt, ist der Satz trivial.

Definition:

$(1^{<a>})_n$ heiße der **n-te Indikatorkoeffizient von a**.

Definition:

$$\delta : \mathbf{N}_0 \rightarrow \{0, 1\} \text{ mit } \delta(x) := \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

heiße der **Elementarindikator auf $\mathbf{N}_0$** . Genauso definiert man den Elementarindikator auf $\mathbf{Z}$.

Definition: Sei $U \subseteq \mathbf{C}$ mit $0 \in U$, $U \subseteq V$, sonst beliebig.

$$\delta_{U:V} : V \rightarrow \{0, 1\} \text{ mit } \delta_U(x) := \begin{cases} 1 & \text{wenn } x = 0 \\ 0 & \text{wenn } x \in U - \{0\} \\ \text{beliebig} & \text{wenn } x \in V - U \end{cases}$$

heiße **eine** Erweiterung von δ auf eine Obermenge V bezüglich U.

Beispiele:

$$V = \mathbf{R}, U = \mathbf{N}_0, \delta_U(x) = \sin(2^{x-1}\pi) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x = 0 \\ 0 & \text{wenn } x \in N \\ \sin(2^{x-1}\pi) & \text{wenn } x \notin N_0 \end{cases}$$

$$V = \mathbf{R}, U = \mathbf{Z}, \delta_U(x) = \sin(2^{x-1}\pi)\sin(2^{-x-1}\pi) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x = 0 \\ 0 & \text{wenn } x \in \mathbf{Z} - \{0\} \\ \sin(2^{|x|-1}\pi) & \text{wenn } x \notin \mathbf{Z} \end{cases}$$

$$V = \mathbf{R}, U = \mathbf{N}_0, \delta_U(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x = 0 \\ 0 & \text{wenn } x \in N \\ \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} & \text{wenn } x \notin N_0 \end{cases}$$

$$V = \mathbf{C}, U = \mathbf{Z}: \lim_{\langle t \rightarrow x \rangle} \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}, \prod_{k \geq 0} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right), \dots$$

$$V = \mathbf{Q}, U = \mathbf{N}_0: \prod_{k \geq 0} \left(1 - \frac{x}{k}\right), \dots, V = \mathbf{R}, U = \mathbf{Z}: \int_0^1 e^{2\pi x t i} dt$$

Bemerkung:

Da $a = \{a_n \mid a_n < a_{n+1} \text{ für alle } n \in \mathbf{N}_0\}$ bereits geordnet ist gilt der

Satz:

$$(1^{\langle a \rangle})_n = \sum_{k \geq 0} \delta(n - a_k) \text{ und somit } 1^{\langle a \rangle}(x) = \sum_{n \geq 0} \sum_{k \geq 0} \delta(n - a_k) x^n.$$

Beweis: Die Summen sind 0, wenn n in a nicht vorkommt und 1 wenn $n \in a$ ist.

Bemerkung:

Der Indikator gibt also die Elemente von a der Größe nach oder allgemeiner nach deren Lage in der zugrunde gelegten Zahlenstruktur an (falls man statt $\{x^n\}$ eine anders strukturierte Platzhaltermenge für formale Potenzreihen nimmt).

Bemerkungen zu den Indikatorkoeffizienten mehrerer Folgen:

Für alle $a, b, a_1, \dots, a_N \in \mathbf{P}(\mathbf{N}_0)$ gilt trivialerweise:

$$\begin{aligned} (1^{\langle a \cap b \rangle})_n &= (1^{\langle a \rangle})_n (1^{\langle b \rangle})_n \\ (1^{\langle N \setminus a \rangle})_n &= 1 - (1^{\langle a \rangle})_n \\ (1^{\langle a \cup b \rangle})_n &= (1^{\langle a \rangle})_n + (1^{\langle b \rangle})_n - (1^{\langle a \rangle})_n (1^{\langle b \rangle})_n \\ \left(1^{\left\langle \bigcup_{k=1}^N a_k \right\rangle}\right)_n &= \left(1^{\langle a_1 \rangle}\right)_n \dots \left(1^{\langle a_N \rangle}\right)_n \end{aligned}$$

$$\left(1^{\left\langle \bigcup_{k=1}^N a_k \right\rangle}\right)_n = \sum_{j=1}^N (-1)^j \sum_{1 \leq v_1 < \dots < v_j \leq N} (1^{\langle v_1 \rangle})_n \dots (1^{\langle v_j \rangle})_n$$

$$1^{\langle a \rangle}(1) = \sum_{n \geq 0} (1^{\langle a \rangle})_n = \begin{cases} \text{Anz.d.Elemente.von } a & a.\text{endlich} \\ \text{Divergente.Summe} & a.\text{unendlich} \end{cases}$$

Bemerkung: Für endliche Teilmengen kann man die entsprechende „abgebrochene“ formale Potenzreihe – also ein Polynom – als Indikator definieren. Ähnliches kann auch für die Definition des Akkumulators und des Generators von endlichen Mengen gemacht werden – im Gegensatz zum potenzierten Akkumulator.

2. Majoranten und Minoranten von a

Seien $a, b \in \mathbf{P}(\mathbf{N}_0)$ der Größe nach geordnet.

Definition:

b heiße eine **Majorante von a**, wenn für alle n gilt: $a_n \leq b_n$.
 b heiße eine **Minorante von a**, wenn für alle n gilt: $a_n \geq b_n$.

Bemerkung: Der Majoranten- bzw Minorantenbegriff lässt sich leicht auf Teil“mengen“ (worin Zahlen auch mehrfach vorkommen können – also ungeordnete Folgen sind) verallgemeinern. Insbesondere könnte auch die Größenanordnung von a und b durch eine beliebige Indizierung von a und b ersetzt werden.

Die Größenanordnung der Majoranten- und Minorantenmenge ist für deren Verwendung als Summationsgrenzen wesentlich.

Spezialfälle: Zu jeder bereits geordneten Teilmenge $a = \{a_n \mid n \geq 0\}$ ist $b = \{b_n \mid b_n = a_{n+1}\}$ eine „natürliche“ – wenn auch nicht minimale – echte Majorante. Die Menge a selbst ist trivialerweise die minimalste Majorante zu sich selbst. „Ähnliches“ gilt auch für Minoranten, insbesondere ist $\mathbf{N}_0$ Minorante zu jeder unendlichen Teilmenge a .

3. Der Akkumulator von a

Definition:

$$A^{<a>}(x) := \sum_{n \geq 0} \left\{ \sum_{k=0}^n (I^{<a>})_k \right\} x^n =: \sum_{n \geq 0} (A^{<a>})_n x^n \text{ hei\ss e der \textbf{Akkumulator von a}.}$$

$$(A^{<a>})_n := \sum_{k \geq 0} (I^{<a>})_k \text{ hei\ss e der n-te Akkumulatorkoeffizient von a.}$$

Bemerkung:

Die Akkumulatorkoeffizienten existieren für alle $a \in \mathbf{P}(\mathbf{N}_0)$ und sind eindeutig bestimmt.

Bemerkung:

$(A^{<a>})_n$ gibt die Anzahl der a_k mit $a_k \leq n$ an.

$$A^{<a>}(x) = \frac{1}{1-x} I^{<a>}(x)$$

Anwendung:

Dichteverlauf einer streng monotonen Folge:

$$D^{<a>}(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(A^{<a>})_n}{n} x^n.$$

4. Der potenzierte Akkumulator für unendliche a

Definition: Sei $a \in \mathbf{P}(\mathbf{N}_0)$ eine unendliche Teilmenge von $\mathbf{N}_0$.

$$P^{<a>}(x) := \sum_{n \geq 0} x^{(A^{<a>})_n} =: \sum_{n \geq 0} (P^{<a>})_n x^n$$

heiße **der potenzierte Akkumulator von a**.

$(P^{<a>})_n$ heiße der **n-te potenzierte Akkumulatorkoeffizient von a**. Er gibt die Anzahl der $(A^{<a>})_k$ die gleich n sind, an.

Bemerkung:

$$P^{<a>}(x) := \sum_{n \geq 0} x^{(A^{<a>})_n} = \sum_{n \geq 0} x^{\sum_{k=0}^n (1^{<a>})_k} = \sum_{n \geq 0} \prod_{k=0}^n x^{(1^{<a>})_k}$$

$$(P^{<a>})_n = \sum_{k \geq 0} \delta \left(n - \sum_{j=0}^k (1^{<a>})_j \right) = \sum_{k \geq 0} \delta (n - (A^{<a>})_k)$$

Bemerkung:

Für endliche a ist diese Begriffsbildung so nicht möglich, da die Folge ab dem größten Element nur mit ∞ und weiter „unbestimmt“ und somit nicht monoton wachsend fortgeführt werden kann.

Satz:

$(P^{<a>})_0$ gibt die Anzahl der Zahlen k mit $0 \leq k < a_0$ an.

$(P^{<a>})_{n+1}$ gibt die Anzahl der Zahlen k mit $a_n \leq k < a_{n+1}$ an.

Beweis:

Die Folge $\{(A^{<a>})_n \mid n \geq 0\}$ ist eine monoton wachsende Folge in $\mathbf{N}_0$. Es gilt:

1.) $(A^{<a>})_0 = \dots = (A^{<a>})_{a_0-1} = 0$ und $(A^{<a>})_{a_0} = 1$ für $a_0 \geq 0$, also gilt $(P^{<a>})_0 = a_0$. Dies gilt

offensichtlich auch für $a_0 = 0$.

2.) $(A^{<a>})_{a_n-1} < (A^{<a>})_{a_n} = \dots = (A^{<a>})_{a_{n+1}-1} < (A^{<a>})_{a_{n+1}}$ für $n > 0$ und weiter:

$(A^{<a>})_{a_n} = (A^{<a>})_j$ gilt offensichtlich für alle j mit $a_n \leq j < a_{n+1}$, also gilt $(P^{<a>})_{n+1} = (a_{n+1}-1) - (a_n-1) = a_{n+1} - a_n$.

Berechnung des n-ten potenzierten Akkumulatorkoeffizienten:

Es gilt $(P^{<a>})_n = \sum_{m \geq 0} \delta \left((A^{<a>})_m = n \right) = \sum_{m \geq 0} \delta \left(\sum_{k=0}^m (1^{<a>})_k - n \right)$. In dieser Formel ist der Index m

nicht beschränkt. Ist $\{M_k \mid k \geq 0\}$ jedoch eine Majorante von a, so ist, wenn man den Index $<a>$ weglässt: $P_n =$

$\delta(A_0-n) + \dots + \delta(A_{a(n)-1}-n) + \delta(A_{a(n)}-n) + \dots + \delta(A_{a(n+1)-1}-n) + \delta(A_{a(n+1)}-n) + \dots + \delta(A_{M(n+1)}-n) =$
 $= \delta(A_{a(n)}-n) + \dots + \delta(A_{a(n+1)-1}-n)$. Also gilt:

$$(P^{<a>})_n = \sum_{m=n}^{M_n} \delta \left(\sum_{k=0}^m (1^{<a>})_k - n \right) \text{ und } P^{<a>}(x) = \sum_{n \geq 0} \sum_{m=n}^{M_n} \delta \left(\sum_{k=0}^m (1^{<a>})_k - n \right) x^n.$$

Klarerweise kann für die untere Indexgrenze jede Zahl zwischen 0 und n, sowie für die obere Indexgrenze jede Zahl $\geq M_n$ verwendet werden.

Bemerkung:

Den n-ten potenzierten Akkumulatorkoeffizienten $(P^{<a>})_n$ erhält man auch, wenn man die linearen Operatoren über der Polynomalgebra $L: (Lx^n = \delta(n))$ und $D: (Dx^{n+1} = (n+1)x^n \text{ mit } D1 = 0)$ verwendet, durch:

$$(P^{<a>})_n = L \frac{D^n}{n!} \sum_{k \geq 0} x^{(A^{<a>})_k} = \sum_{k \geq 0} \binom{(A^{<a>})_k}{n} \delta((A^{<a>})_k = n) = \sum_{k \geq 0} \delta((A^{<a>})_k = n) = \sum_{\substack{\dots k \geq 0 \\ (A^{<a>})_k = n}} 1 =$$

Anzahl der $(A^{<a>})_k$ für die $(A^{<a>})_k = n$ ist – also das vorige Resultat mit anderen Worten.

5. Der Generator für unendliche a

Satz:

$$a_n = \sum_{k=0}^n (P^{<a>})_k$$

Beweis:

1) Sei $n = 0$. $(P^{<a>})_0 = \sum_{k=0}^0 (1^{<a>})_k = \text{Anzahl der ersten } k \text{ für die alle } (1^{<a>})_k \text{ gleich } 0$

sind, d.h. wenn $0 \leq k < a_0$ ist. Ergo gilt $(P^{<a>})_0 = a_0$.

2) Angenommen der Satz stimmt für ein $n \geq 0$, dann folgt aus $(P^{<a>})_{n+1} = \text{Anzahl der } k \text{ mit } a_n \leq k < a_{n+1} \text{ sofort die Behauptung.}$

Definition:

$$a(x) := \sum_{n \geq 0} a_n x^n \text{ hei\ss e der Generator von } a.$$

Somit gilt trivialerweise der

Satz:

$$a(x) = \frac{1}{1-x} P^{<a>}(x) = \frac{1}{1-x} \sum_{n \geq 0} \left\{ \prod_{k=0}^n x^{(1^{<a>})_k} \right\} \text{ bzw.}$$

$$a(x) = \frac{1}{1-x} \sum_{n \geq 0} \sum_{m=n}^{M_n} \delta \left(\sum_{k=0}^m (1^{<a>})_k - n \right) x^n \text{ für eine Majorantenfolge } M.$$

Bemerkung:

Für endliche Teilmengen kann - wie beim Indikator - die Aufzählung der Elemente der Größe nach zum Indikatorpolynom und weiter zum Generatorpolynom umgeschrieben werden.

Eine andere Variante:

Man rechnet:

$$x^{(A^{<a>})_n} = x^{\sum_{k=0}^n (1^{<a>})_k} = \prod_{k=0}^n x^{(1^{<a>})_k}, \quad x^{(1^{<a>})_k} = \begin{cases} x & (1^{<a>})_k = 1 \\ 1 & (1^{<a>})_k = 0 \end{cases} = (1^{<a>})_k x + (1 - (1^{<a>})_k) \text{ somit}$$

$$x^{(A^{<a>})_n} = \prod_{k=0}^n [(1^{<a>})_k x + (1 - (1^{<a>})_k)],$$

woraus sich

$$P^{<a>}(x) = \sum_{n \geq 0} x^{(A^{<a>})_n} = \sum_{n \geq 0} \prod_{k=0}^n [(1^{<a>})_k x + (1 - (1^{<a>})_k)]$$

Ergibt.

Daraus erhält man den Generator als

$$a(x) = \frac{1}{1-x} \sum_{n \geq 0} \prod_{k=0}^n [(1^{<a>})_k x + (1 - (1^{<a>})_k)].$$

Bestimmung von a_n :

Aus $x^{(A^{<a>})_k} = \prod_{v=0}^k [1 + (1^{<a>})_v (x-1)]$ bestimmt man davon zunächst den Koeffizienten von x^m :

$$\begin{aligned} \delta\left(m - \sum_{v=0}^k (1^{<a>})_v\right) &= L \frac{D^m}{m!} \prod_{v=0}^k [1 + (1^{<a>})_v (x-1)] = \\ &= L \frac{1}{m!} \sum_{j_0, \dots, j_k} \binom{m}{j_0, \dots, j_k} \prod_{v=0}^k \{D^{j_v} [1 + (1^{<a>})_v (x-1)]\} = \\ &= L \frac{1}{m!} \sum_{\substack{j_0, \dots, j_k \in \{0,1\} \\ j_0 + \dots + j_k = m}} \binom{m}{j_0, \dots, j_k} \prod_{v=0}^k \{D^{j_v} [1 + (1^{<a>})_v (x-1)]\} = \\ &= L \sum_{\substack{j_0, \dots, j_k \in \{0,1\} \\ j_0 + \dots + j_k = m}} \prod_{v=0}^k \{D^{j_v} [1 + (1^{<a>})_v (x-1)]\} = \\ &= L \sum_{\substack{j_0, \dots, j_k \in \{0,1\} \\ j_0 + \dots + j_k = m}} \prod_{v=0}^k \{\delta(j_v) + \delta(j_v) [(1^{<a>})_v (x-1)] + (1^{<a>})_v \delta(j_v - 1)\} = \\ &= \sum_{\substack{j_0, \dots, j_k \in \{0,1\} \\ j_0 + \dots + j_k = m}} \prod_{v=0}^k \{\delta(j_v) - \delta(j_v) [(1^{<a>})_v] + (1^{<a>})_v \delta(j_v - 1)\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{j_0, \dots, j_k \in \{0,1\} \\ j_0 + \dots + j_k = m}} \prod_{v=0}^k \{ \delta(j_v) [1 - (1^{<a>})_v] + (1^{<a>})_v \delta(j_v - 1) \}. \\
(P^{<a>})_m &= \sum_{k \geq 0} \delta \left(m - \sum_{v=0}^k (1^{<a>})_v \right) = \sum_{k \geq 0} \sum_{\substack{j_0, \dots, j_k \in \{0,1\} \\ j_0 + \dots + j_k = m}} \prod_{v=0}^k \{ \delta(j_v) [1 - (1^{<a>})_v] + (1^{<a>})_v \delta(j_v - 1) \}; \\
a_n &= \sum_{m=0}^n \sum_{k \geq 0} \sum_{\substack{j_0, \dots, j_k \in \{0,1\} \\ j_0 + \dots + j_k = m}} \prod_{v=0}^k \{ \delta(j_v) [1 - (1^{<a>})_v] + (1^{<a>})_v \delta(j_v - 1) \}.
\end{aligned}$$

6. Beispiel

Gegeben seien die ungeraden natürlichen Zahlen UG.

Aus Übersichtlichkeitsgründen lassen wir *hier* die Teilmengenindizierung $^{<UG>}$ weg, da keine Verwechslungsgefahr besteht.

Zu UG gehört die Zahl 1, weiters gilt: Ist u aus UG, dann auch u+2.

Damit erhält man die Folge der Indikatorkoeffizienten 1_n als eine Folge, die mit 0 beginnt und weiter aus einander abwechselnden Nullern und Einsern besteht. Also gilt:

$$1_n = \frac{1 - (-1)^n}{2}.$$

Damit lässt sich der Indikator folgendermaßen bestimmen:

$$1(x) = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} (1 - (-1)^n) x^n = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} x^n - \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} ((-1)^n) x^n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} \right) = \frac{x}{(1-x)(1+x)}.$$

Die Akkumulatorkoeffizienten ergeben sich durch:

$$A_n = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n (1 - (-1)^k) = \frac{1}{2} (n+1) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n (-1)^k = \frac{1}{2} (n+1) - \frac{1}{4} (1 + (-1)^n).$$

Den Akkumulator kann man nun durch Aufsummierung bestimmen; hier verwendet man einfacher die Formel

$$A(x) = \frac{1}{1-x} 1(x) = \frac{x}{(1-x)^2 (1+x)}.$$

Berechnung des potenzierten Akkumulators:

$$\begin{aligned}
P(x) &= \sum_{n \geq 0} x^{A_n} = \sum_{n \geq 0} (\sqrt{x})^{n+1} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)^{\frac{1+(-1)^n}{2}} = \sum_{n \geq 0} (\sqrt{x})^{2n+1} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) + \sum_{n \geq 0} (\sqrt{x})^{2n+2} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)^0 = \\
&= \sum_{n \geq 0} (\sqrt{x})^{2n} + \sum_{n \geq 0} (\sqrt{x})^{2n+2} = \frac{1}{1-x} + \frac{x}{1-x} = \frac{1+x}{1-x}.
\end{aligned}$$

Der n-te potenzierte Akkumulatorkoeffizient ergibt sich somit durch

$$\text{n-ter Koeffizient von } \frac{1}{1-x} \text{ plus n-ter Koeffizient von } \frac{x}{1-x}, \text{ also}$$

$$P_n = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 2 & n > 0 \end{cases} \text{ und somit } u_n = \sum_{k=0}^n P_k = 1 + 2n \text{ als } n\text{-te ungerade Zahl.}$$

Nunmehr gilt: $UG(x) = \frac{1}{1-x} P(x) = \frac{1+x}{(1-x)^2} = \sum_{n \geq 0} (2n+1)x^n$ ist der Generator der Menge der ungeraden Zahlen.