

ZAHLENTHEORIE II

TEILER UND VIELFACHE EINER NATÜRLICHEN ZAHL

erstellt von

Boris Stibirr

Vorbemerkung: Diese Arbeit formuliert allseits bekannte Sachverhalte in der von uns benutzten Terminologie und ermöglicht damit folgenden Arbeiten ein einfacheres Verweis- bzw. Beweisverfahren.

Inhalt:

1. Definitionen	2
2. Berechnungen	3
. 2.1. Der Indikatorkoeffizient von „ k teilt n “	3
. 2.2. Der Teilerindikator von n	4
. 2.3. Der Vielfachheitsindikator von n	4
. 2.4. Klassische Darstellungen	5
3. Zusammengesetzte Teiler- und Vielfachheitsmengen	6
. 3.1. Menge der gemeinsamen Teiler von n und m	6
. 3.2. Menge der gemeinsamen Vielfachen von n und m	6

1. Definitionen

Definition:

Unter einem **Teiler einer natürlichen Zahl n** versteht man eine natürliche Zahl k für die es eine natürliche Zahl u mit $n = uk$ gibt.

$T_n := \{k \mid k \text{ ist Teiler von } n\}$ heiße die **Teilermenge von n**.

Unter einem **Vielfachen einer natürlichen Zahl n** versteht man eine natürliche Zahl k für die es eine natürliche Zahl u mit $k = un$ gibt.

$V_n := \{k \mid k \text{ ist Vielfaches von } n\}$ bezeichne die **Menge der Vielfachen von n**.

Definition:

Seien k und n natürliche Zahlen.

$$\delta(k \mid n) := \begin{cases} 1 & \text{falls } k \text{ teilt } n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

heiße der **Teilerindikatorkoeffizient von (k,n)**.

Definition:

Unter der **Teilerstruktur (auf N)** versteht man die formale Potenzreihe

$$TS(x,t) := \sum_{k,n \geq 1} \delta(k,n) x^k t^n$$

Definition:

Sei $f(x,t)$ eine (doppelte) formale Potenzreihe bezüglich der Platzhalter x und t, so heiße $[t^n]f(x,t)$ der Koeffizient von t^n in der Funktion $f(x,t)$. Desgleichen nennt man $[x^k]f(x,t)$ den Koeffizienten von x^k in der Funktion $f(x,t)$.

Damit erhält man, trivialerweise, den **Indikator der Teilermenge von n** als

$$T_n(x) = \sum_{k=1}^n \delta(k \mid n) x^k = [t^n] TS(x,t)$$

und den **Indikator der Menge der Vielfachen von n** als

$$V_n(x) = \sum_{k \geq 1} \delta(n \mid k) x^k = [t^n] TS(t,x).$$

Man beachte, dass in $T_n(x)$ der Summationsbereich endlich genommen werden kann.

Visualisierung:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	...
.	2		4		6		8		10		12		14		16		18	...
.		3			6			9			12			15			18	...
.			4				8				12				16			...
.				5					10					15				...
.					6						12						18	...
.						7							14					...
.							8							16				..., usw.

Die Zeilen geben darin die Koeffizienten der Vielfachheitsfunktion und die Spalten die Koeffizienten der Teilerfunktion des Diagonalelementes an.

2. Berechnungen

2.1. Der Indikatorkoeffizient von „k teilt n“

Seien k und n natürliche Zahlen > 0 . Dann gilt der

Satz:

$$\delta(k | n) = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} e^{\frac{2\pi j}{k} i}$$

Beweis:

Sei k kein Teiler von n. Dann gilt:

$$\frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} e^{\frac{2\pi j}{k} i} = \frac{1}{k} \frac{e^{\frac{2\pi k}{k} i} - 1}{e^{\frac{2\pi}{k} i} - 1} = 0, \text{ weil in diesen Falle stets der Zähler Null und der Nenner}$$

ungleich Null ist.

$$\text{Sei nun k ein Teiler von n. Der Funktionswert von } f_{n,k}(x) = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} e^{\frac{2\pi j}{k} ix} = \frac{1}{k} \frac{e^{\frac{2\pi k}{k} ix} - 1}{e^{\frac{2\pi}{k} ix} - 1} \text{ kann}$$

für den Punkt $x = 1$ mithilfe der Regel von l'Hospital bestimmt werden als

$$\frac{1}{k} \frac{e^{\frac{2\pi k}{k} ix} - 1}{e^{\frac{2\pi}{k} ix} - 1} = \frac{1}{k} \frac{\frac{2\pi k i}{k}}{\frac{2\pi i}{k}} = 1. \quad \text{qed.}$$

Anmerkung: In der Literatur wird man viele verschiedene Beweise finden (zB bei van der Waerden: Algebra I und II).

Bemerkung:

Da sich die Imaginärteile in der Koeffizientenformel aufheben müssen, kann man schreiben:

$$\delta(k | n) = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \left[\cos\left(\frac{2\pi nj}{k}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2\pi nj}{k}\right) \right] = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \left[\cos\left(\frac{2\pi nj}{k}\right) \right]$$

2.2. Der Teilerindikator von n

$$T_n(x) = \sum_{k=1}^n \delta(k | n) x^k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} e^{\frac{2\pi nj}{k}} x^k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \cos\left(\frac{2\pi nj}{k}\right) x^k.$$

Er gibt die Teiler von n der Größe nach an.

Die Anzahl der Teiler von n ergibt sich somit als

$$T_n(1) = \sum_{k=1}^n \delta(k | n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} e^{\frac{2\pi nj}{k}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \cos\left(\frac{2\pi nj}{k}\right).$$

2.3. Der Vielfachheitsindikator von n

Zunächst könnte man rechnen:

$$V_n(x) = \sum_{k \geq 1} \delta(n | k) x^k = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi kj}{n}} x^k, \text{ doch einfacher ist der direkte Weg, den man sofort}$$

aus der Visualisierung von TS(x,t) ablesen kann:

$$V_n(x) = (x^n)^1 + (x^n)^2 + (x^n)^3 + \dots = \frac{x^n}{1 - x^n}.$$

Formaler Beweis zur Übung für Anfänger:

$$\text{Es gilt: } \frac{x^n}{1 - x^n} = -\frac{x^n}{x^n - 1} = -\frac{x^n}{(x - e^{\frac{2\pi i}{n} 0})(x - e^{\frac{2\pi i}{n} 1}) \dots (x - e^{\frac{2\pi i}{n} (n-1)})} = -\frac{x^n}{\prod_{v=0}^{n-1} \left(x - e^{\frac{2\pi i}{n} v}\right)}. \text{ Dies}$$

ergibt gemäß der Formel für die Partialbruchzerlegung eines Polynoms mit verschiedenen Nullstellen, das im Nenner steht:

$$\frac{x^n}{1 - x^n} = -x^n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\left[(x^n - 1)\right]_{x=e^{\frac{2\pi i}{n} k}} \left(x - e^{\frac{2\pi i}{n} k}\right)} = -x^n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\left[nx^{n-1}\right]_{x=e^{\frac{2\pi i}{n} k}} \left(x - e^{\frac{2\pi i}{n} k}\right)} =$$

$$= -\frac{x^n}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{e^{\frac{2\pi i}{n}k(n-1)} \left(x - e^{\frac{2\pi i}{n}k} \right)} = -\frac{x^n}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{e^{\frac{2\pi i}{n}k} \left(x - e^{\frac{2\pi i}{n}k} \right)} = -\frac{x^n}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\left(e^{\frac{2\pi i}{n}k} x - 1 \right)} =$$

$$\frac{x^n}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\left(1 - e^{\frac{2\pi i}{n}k} x \right)} = \frac{x^n}{n} \sum_{v \geq 0} \left[\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi i}{n}kv} \right] x^v = \frac{x^n}{n} \sum_{v \geq 0} \left[\frac{e^{\frac{2\pi i}{n}nv} - 1}{e^{\frac{2\pi i}{n}v} - 1} \right]_{t \rightarrow 1} x^v.$$

Aus dem Satz von l'Hospital folgt

$$\frac{x^n}{1-x^n} = \frac{x^n}{n} \sum_{v \geq 0} \left[\begin{matrix} 0 \dots \dots \dots n.teilt.v.nicht \\ \left(\frac{-2\pi i n v e^{-\frac{2\pi i}{n}nv} / n}{-2\pi i v e^{-\frac{2\pi i}{n}v} / n} \right) \dots \dots \dots n.teilt.v \\ \end{matrix} \right]_{t \rightarrow 1} x^v = \frac{x^n}{n} \sum_{v \geq 0} \left[\begin{matrix} 0 \dots n.teilt.v.nicht \\ n \dots \dots \dots n.teilt.v \\ \end{matrix} \right] x^v =$$

$$= \sum_{v \geq 0} \left[\begin{matrix} 0 \dots n.teilt.v.nicht \\ 1 \dots \dots \dots n.teilt.v \\ \end{matrix} \right] x^{v+n} = \sum_{v \geq 1} \left[\begin{matrix} 0 \dots n.teilt.v.nicht \\ 1 \dots \dots \dots n.teilt.v \\ \end{matrix} \right] x^v = \sum_{v \geq 1} \delta(n | v) x^v.$$

Summiert man alle Vielfachheitsindikatoren auf, so erhält man den **Teileranzahlgenerator** $T(x)$ ebenfalls durch Ablesen:

$$T(x) = \sum_{n \geq 1} V_n(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{k \geq 1} (\text{Anzahl.der.Teiler.von.k}) x^k$$

2.4. Klassische Darstellung - Vorschau

Sei $\mathbf{P} = \{p_0, p_1, \dots\}$ die Primzahlmenge – der Größe nach geordnet. Weiters seien $N, K \in \mathbb{N}$ durch $N = \prod_{j \geq 0} p_j^{v_j(N)} = \prod_{p \in P} p^{w_p(N)}$ und $K = \prod_{j \geq 0} p_j^{v_j(K)} = \prod_{p \in P} p^{w_p(K)}$. Man kann dann „K teilt N“ definieren durch: Für alle $p \in \mathbf{P}$ gilt: $w_p(K) \leq w_p(N)$ - oder gleichwertig: Für alle $j \geq 0$ gilt: $v_j(K) \leq v_j(N)$.

Die Anzahl der Teiler von n - $T_n(1)$ ist somit:

$$T_n(1) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} e^{\frac{2\pi i j}{k}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \cos\left(\frac{2\pi n}{k} j\right) = \prod_{j \geq 0} (1 + v_j(n)) = \prod_{p \in P} (1 + w_p(n)).$$

Der Teileranzahlgenerator $T(x)$ kann trivialerweise durch Aufsummierung daraus gefunden werden.

3. Zusammengesetzte Teiler- und Vielfachheitsmengen

3.1. Menge der gemeinsamen Teiler von n und m

Der Indikator der Menge der gemeinsamen Teiler von n und m ist

$$gT_{n,m}(x) = \sum_{k \geq 0} \delta(k, n) \delta(k, m) x^k.$$

Da hier nur Polynome vorliegen, existiert $gT_{n,m}(1)$ = Anzahl der gemeinsamen Teiler von n und m.

In der „klassischen“ Darstellung erhält man mittels $n = \prod_{p \in P} p^{w_p(n)}$ die Menge aller Teiler von n durch

$$\left\{ \prod_{p \in P} p^{w_p(k)} \mid \forall (p \in P, k \in N), gilt : w_p(k) \leq w_p(n) \right\}.$$

Weiters ist die Menge der gemeinsamen Teiler von n und m durch

$$\left\{ \prod_{p \in P} p^{w_p(k)} \mid \forall (p \in P, k \in N), gilt : w_p(k) \leq \min\{w_p(n), w_p(m)\} \right\}$$

gegeben.

Diese Formeln gelten sinngemäß auch in der „v(k)-Darstellung“, dh. aus $n = \prod_{k \geq 0} p_k^{v_k(n)}$.

Die Erweiterung der Definition auf die Menge der gemeinsamen Teiler von endlich vielen Zahlen erfolgt „sinngemäß“.

Diese Darstellung stellt die „multiplikative“ Anordnung der Teiler und deren Extremwert in den Vordergrund, während in der Darstellung durch Potenzreihen die Teiler der Größe nach angeordnet sind.

3.2. Menge der gemeinsamen Vielfachen von n und m

Der Indikator der Menge der gemeinsamen Vielfachen von n und m ist

$$gV_{n,m}(x) = \sum_{k \geq 0} \delta(n, k) \delta(m, k) x^k.$$

Die „klassische Darstellung der Vielfachenmenge von n und m ist

$$\left\{ \prod_{p \in P} p^{w_p(k)} \mid \forall (p \in P, k \in N), gilt : \max\{w_p(n), w_p(m)\} \leq w_p(k) \right\}.$$

